Le Cemagref

Le modèle LEYP

Prédiction des défaillances des canalisations d'eau sous pression

eau - territoires - développement durable

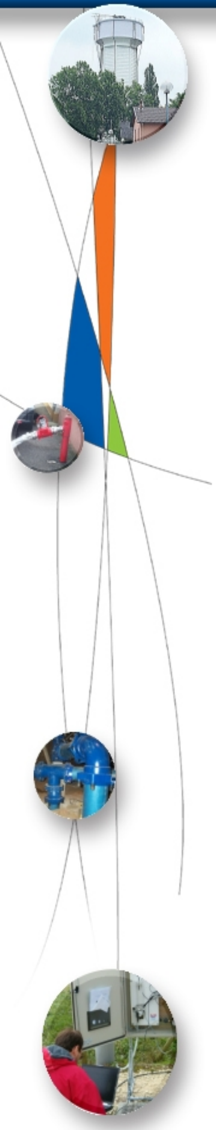
Cemagref - REBX
50 avenue de Verdun
33612 Cestas Cedex

Pourquoi modéliser le risque de défaillance ?

Pourquoi modéliser le risque de défaillance ?

- A court terme :

- A moyen ou long terme :



- **A court terme :**

  Prioriser les canalisations
  à réhabiliter ou remplacer

- **A moyen ou long terme :**

Pourquoi modéliser le risque de défaillance ?

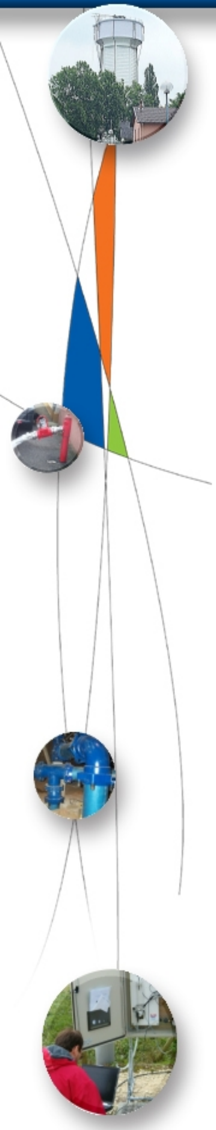
- **A court terme :**

  Prioriser les canalisations
  à réhabiliter ou remplacer

- **A moyen ou long terme :**

  Choisir un programme
  pluriannuel de travaux
  ⇒ Comparer des scénarios

Plan de l’exposé du modèle LEYP



- Le phénomène à modéliser
- Différentes approches depuis 1994
- Cadre théorique
- Fonction de vraisemblance et estimation des paramètres
- Validation

Le phénomène à modéliser

Le phénomène à modéliser

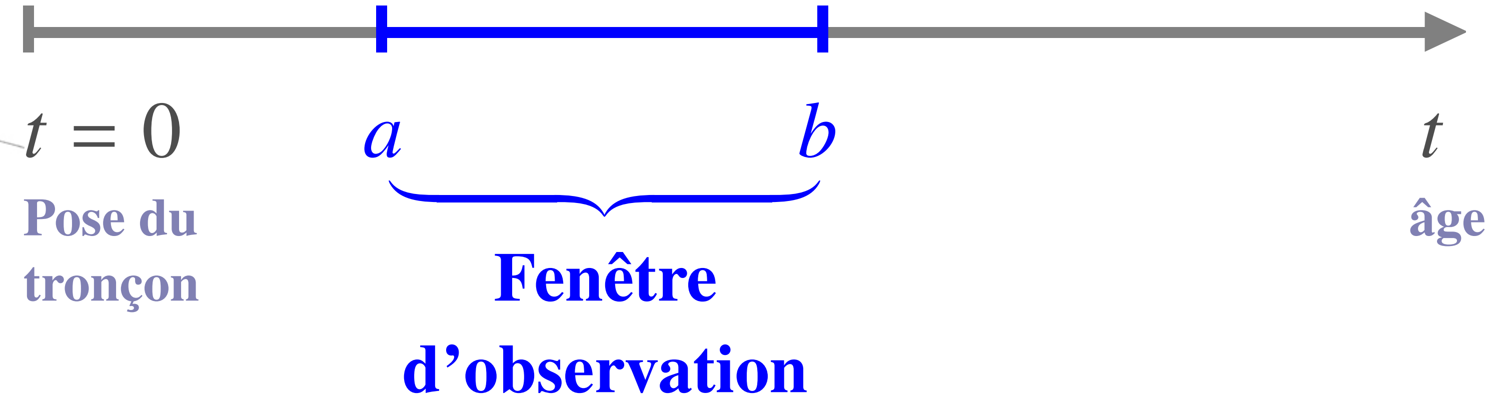
$t = 0$

Pose du tronçon

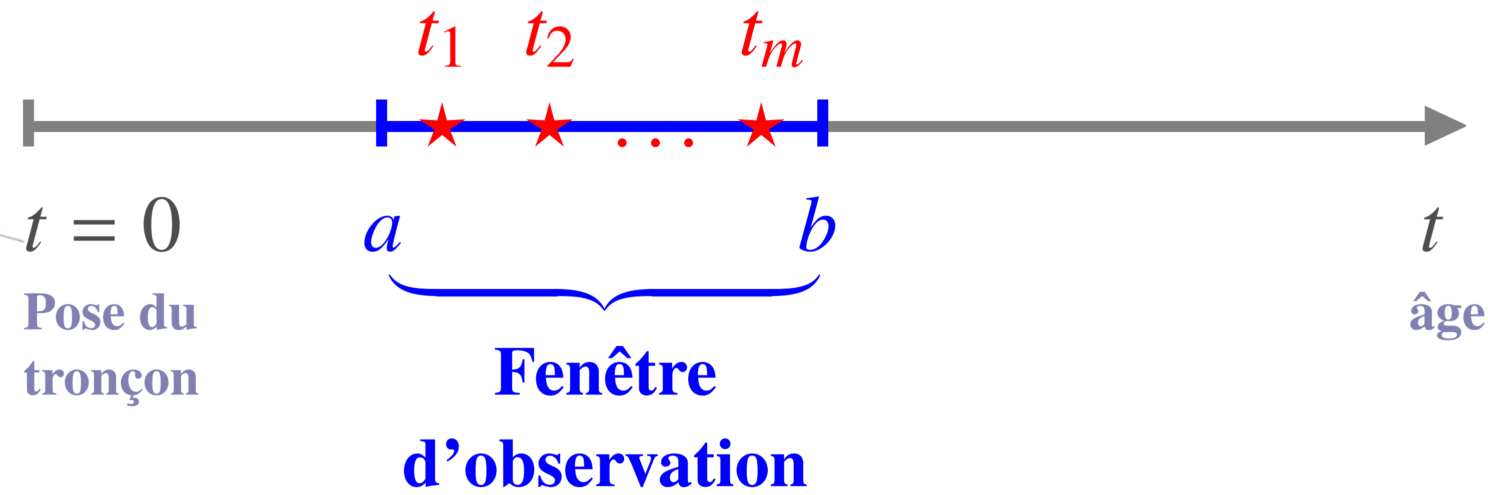
t

âge

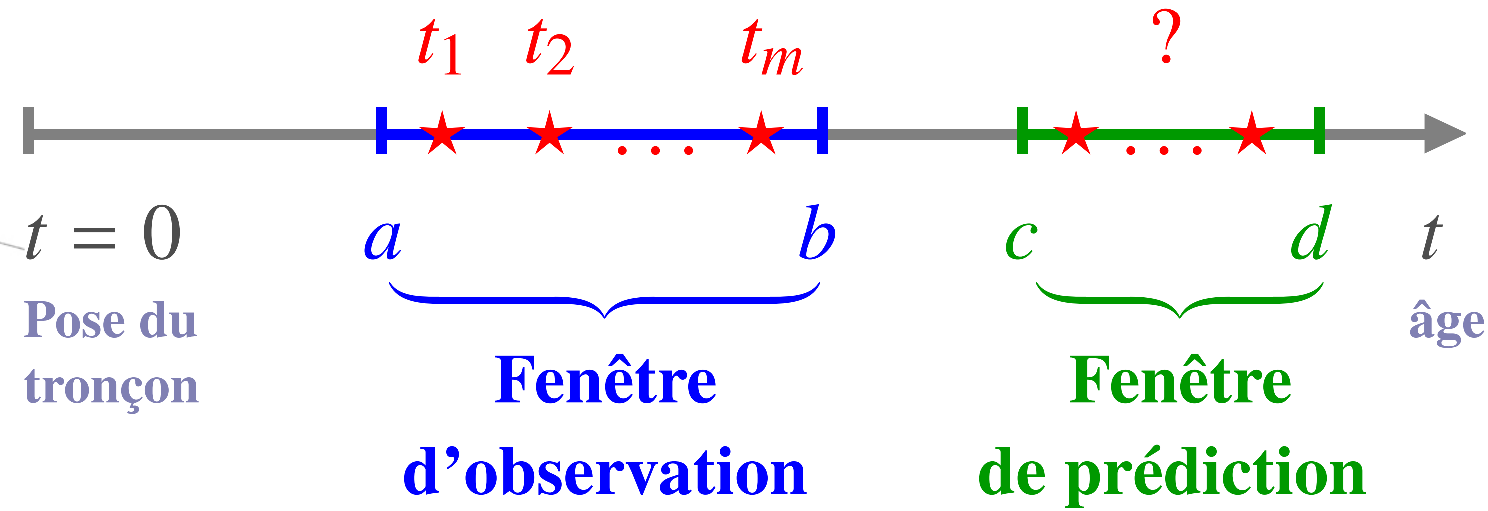
Le phénomène à modéliser



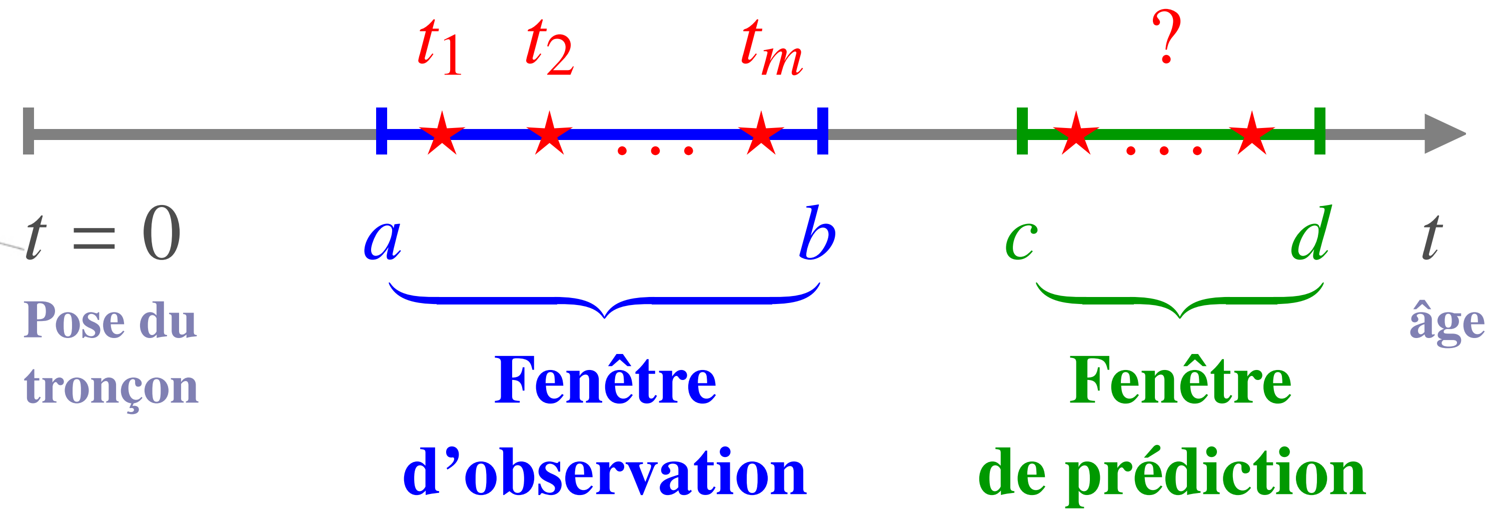
Le phénomène à modéliser



Le phénomène à modéliser

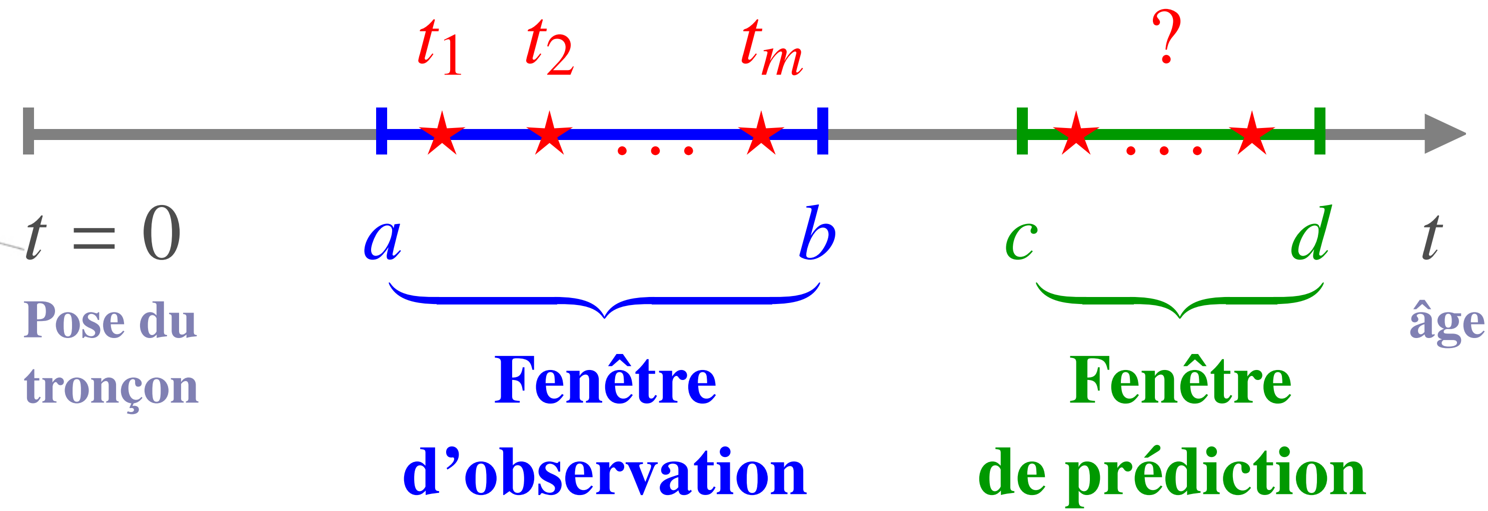


Le phénomène à modéliser



▶ Tronquée à gauche

Le phénomène à modéliser



- ▶Tronquée à gauche
- ▶Censurée à droite

Différentes approches depuis 1994

- Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)

Différentes approches depuis 1994

- **Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)**
- **Modèle développé ORH depuis 1995**

Différentes approches depuis 1994

- Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)
- Modèle développé ORH depuis 1995
- Thèse G. Pelletier 1999 (Québec)

Différentes approches depuis 1994

- Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)
- Modèle développé ORH depuis 1995
- Thèse G. Pelletier 1999 (Québec)
- Thèse J. Malandain 1999 (Lyon)

Différentes approches depuis 1994

- Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)
- Modèle développé ORH depuis 1995
- Thèse G. Pelletier 1999 (Québec)
- Thèse J. Malandain 1999 (Lyon)
- Thèse J. Røstum 2000 (Trondheim)



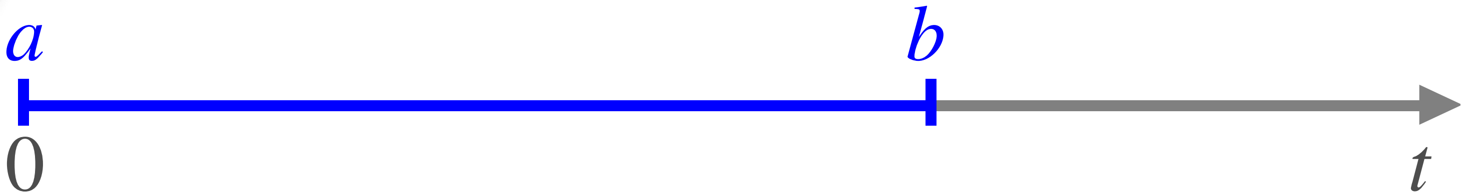

- Thèse P. Eisenbeis 1994 (Bordeaux)
- Modèle développé ORH depuis 1995
- Thèse G. Pelletier 1999 (Québec)
- Thèse J. Malandain 1999 (Lyon)
- Thèse J. Røstum 2000 (Trondheim)
- Projet européen FP5 CareW 2001-2003

Cemagref

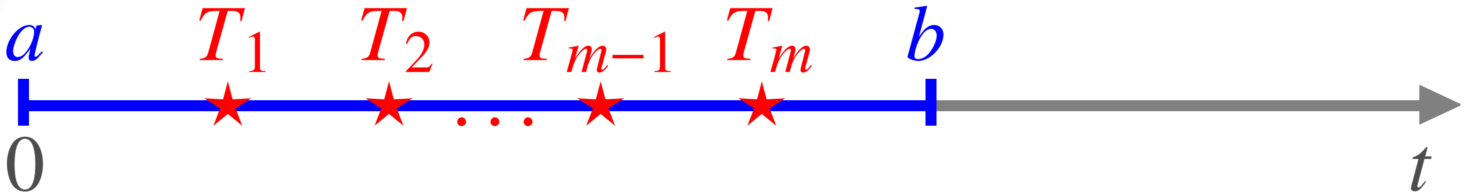
Le modèle Eisenbeis 1994

Le modèle Eisenbeis 1994

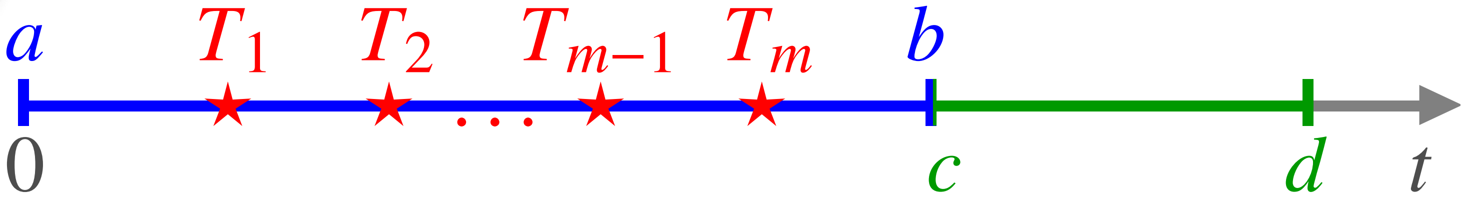
Le modèle Eisenbeis 1994



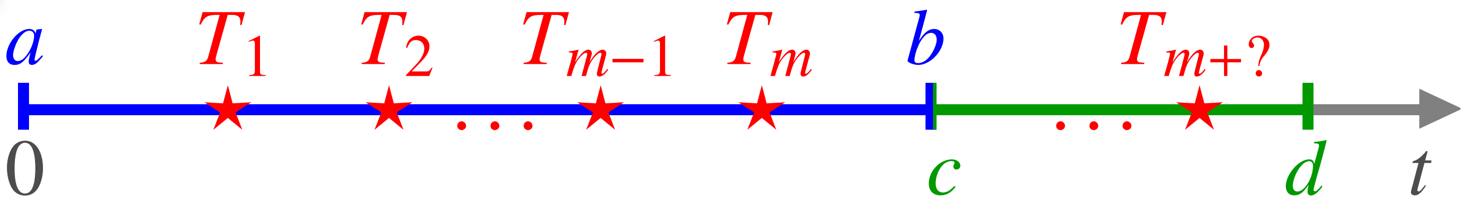
Le modèle Eisenbeis 1994



Le modèle Eisenbeis 1994



Le modèle Eisenbeis 1994



Le modèle Eisenbeis 1994

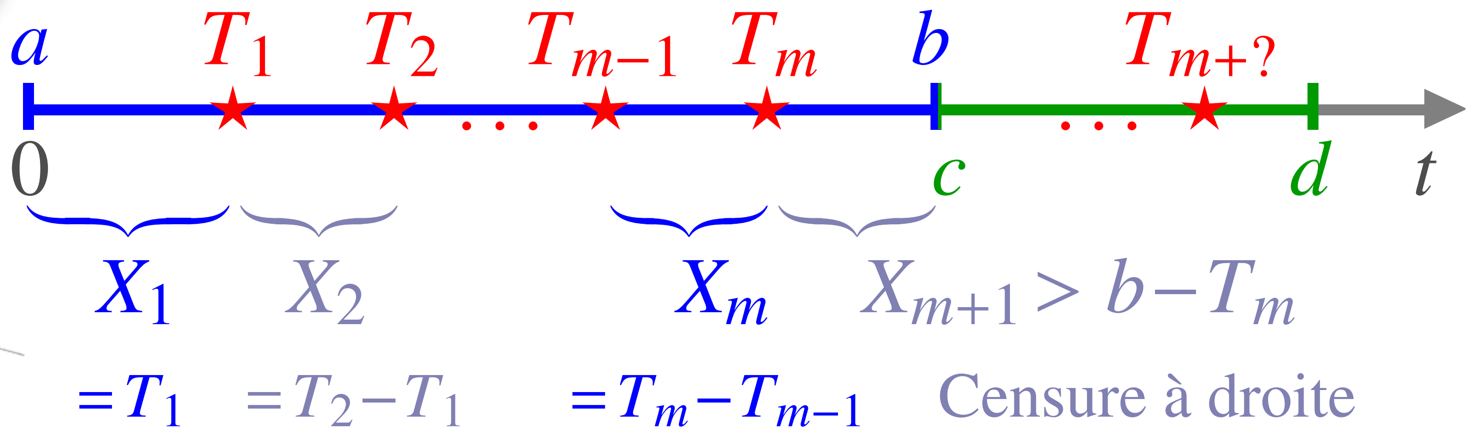
$a \quad T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_{m-1} \quad T_m \quad b \quad \dots \quad T_{m+?}$

$0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c \qquad\qquad d \qquad t$

$\underbrace{\qquad}_{X_1} \quad \underbrace{\qquad}_{X_2} \quad \dots \quad \underbrace{\qquad}_{X_m} \quad \underbrace{\qquad}_{X_{m+1} > b - T_m}$

$X_1 = T_1$ $\qquad X_2 = T_2 - T_1$ $\qquad X_m = T_m - T_{m-1}$ $\qquad X_{m+1} > b - T_m$ Censure à droite

Le modèle Eisenbeis 1994



- **Cadre théorique de l'analyse de survie :**

  $X_j \sim \mathcal{W}e\left(\delta_j, \mathbf{Z}^T \boldsymbol{\beta}_j\right)$ **(PHM)**

  $P\{X_j > x \mid \mathbf{Z}\} = \exp(-x^{\delta_j} e^{\mathbf{Z}^T \boldsymbol{\beta}_j})$

- **Rôle central de l'ordre de la casse (stratif.)**

- **Pas de vieillissement explicite**

Cemagref

Adaptations du modèle Eisenbeis

Adaptations du modèle Eisenbeis

- **Fenêtre d'observation** $[a, b]$ **avec** $a > 0$ **(troncature gauche)**

Adaptations du modèle Eisenbeis

- **Fenêtre d'observation $[a, b]$ avec $a > 0$ (troncature gauche)**
- **Introduction de $\ln j$ dans Z**
  $\Longrightarrow$ **deux strates ($j = 1$ et $j \geqslant 2$), voire une seule**

Adaptations du modèle Eisenbeis

- **Fenêtre d'observation $[a, b]$ avec $a > 0$ (troncature gauche)**
- **Introduction de $\ln j$ dans Z**
  $\Longrightarrow$ deux strates ($j = 1$ et $j \geqslant 2$), voire une seule
- **Prise en compte du vieillissement par l'introduction de $\ln t_{j-1}$ dans Z**

Adaptations du modèle Eisenbeis

- **Fenêtre d'observation** $[a, b]$ **avec** $a > 0$ **(troncature gauche)**
- **Introduction de** $\ln j$ **dans** ***Z***
  $\Longrightarrow$ **deux strates (**$j = 1$ **et** $j \geqslant 2$**),**
  voire une seule
- **Prise en compte du vieillissement par l'introduction de** $\ln t_{j-1}$ **dans** ***Z***
- **Calcul des prédictions dans** $[c, d]$ **par Monte Carlo**

Le modèle ORH 1995 (2)

- Avantages

Modulation du risque au tronçon

→ covariables dans *Z*

Bonne détection du risque

Le modèle ORH 1995 (2)

- **Avantages**

  Modulation du risque au tronçon

  $\rightarrow$ covariables dans Z

  Bonne détection du risque

- **Limitations**

  Non rigoureux sur le plan théorique

  Biais de prédiction important

  Vieillissement non explicite

  Lourdeur des calculs de prédiction

Cadre du modèle Eisenbeis 1994 originel

Cadre du modèle Eisenbeis 1994 originel

- **Solution rigoureuse du problème de la troncature à gauche ($a > 0$)**

Le modèle Pelletier 1999

Cadre du modèle Eisenbeis 1994 originel

- Solution rigoureuse du problème de la troncature à gauche ($a > 0$)
- Introduction implicite des vraisemblances conditionnelle sur le nb de casses sur $[0, a[$ et marginale

Le modèle Pelletier 1999

Cadre du modèle Eisenbeis 1994 originel

- Solution rigoureuse du problème de la troncature à gauche ($a > 0$)
- Introduction implicite des vraisemblances conditionnelle sur le nb de casses sur $[0, a[$ et marginale
- Problème du vieillissement non abordé

Le modèle Malandain 1999

Modèle à l'échelle du groupe homogène *k* de tronçons (matériau×diamètre×pose)

Modèle à l'échelle du groupe homogène k de tronçons (matériau×diamètre×pose)

- **Pas de régression généralisée ni de risques proportionnels**

Le modèle Malandain 1999

Modèle à l'échelle du groupe homogène k de tronçons (matériau$\times$diamètre$\times$pose)

- **Pas de régression généralisée ni de risques proportionnels**
- **Estimation brute du taux annuel de casse $\lambda_k(t)$ dans la fenêtre d'observation avec pas de temps discret ($\Delta t = 1$ an)**

Le modèle Malandain 1999

Modèle à l'échelle du groupe homogène k de tronçons (matériau×diamètre×pose)

- **Pas de régression généralisée ni de risques proportionnels**
- **Estimation brute du taux annuel de casse $\lambda_k(t)$ dans la fenêtre d'observation avec pas de temps discret ($\Delta t = 1$ an)**
- **Regression de $\lambda_k(t)$ en $t^{\delta-1},\ \delta \geqslant 1$**

Le modèle Røstum 2000 (1)

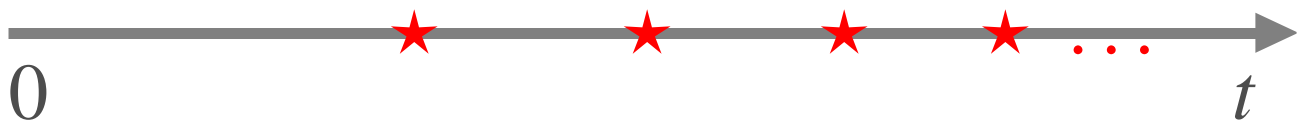
« Non Homogeneous Poisson Process »

Notion centrale de processus de comptage

Le modèle Røstum 2000 (1)

« Non Homogeneous Poisson Process »

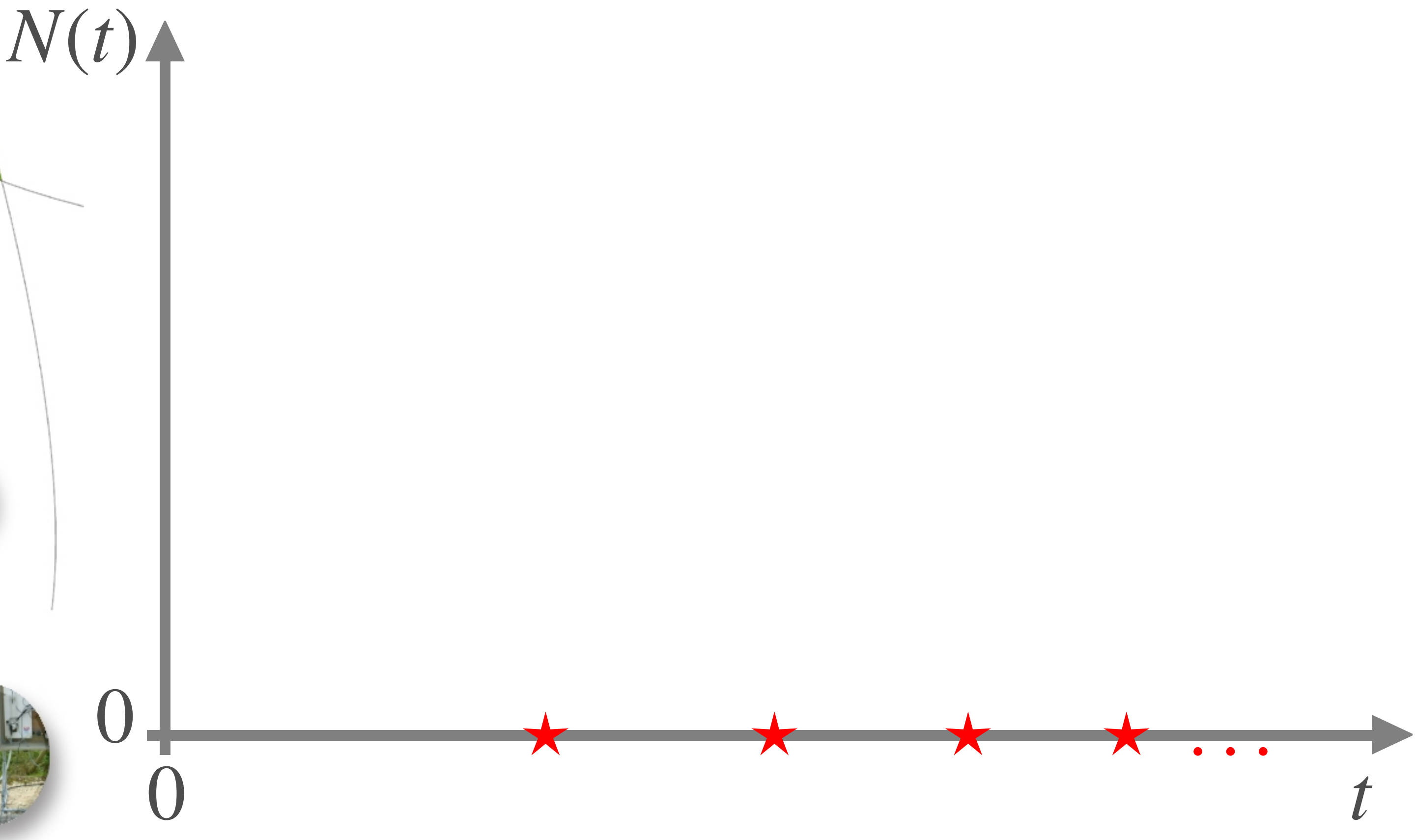
Notion centrale de processus de comptage



Le modèle Røstum 2000 (1)

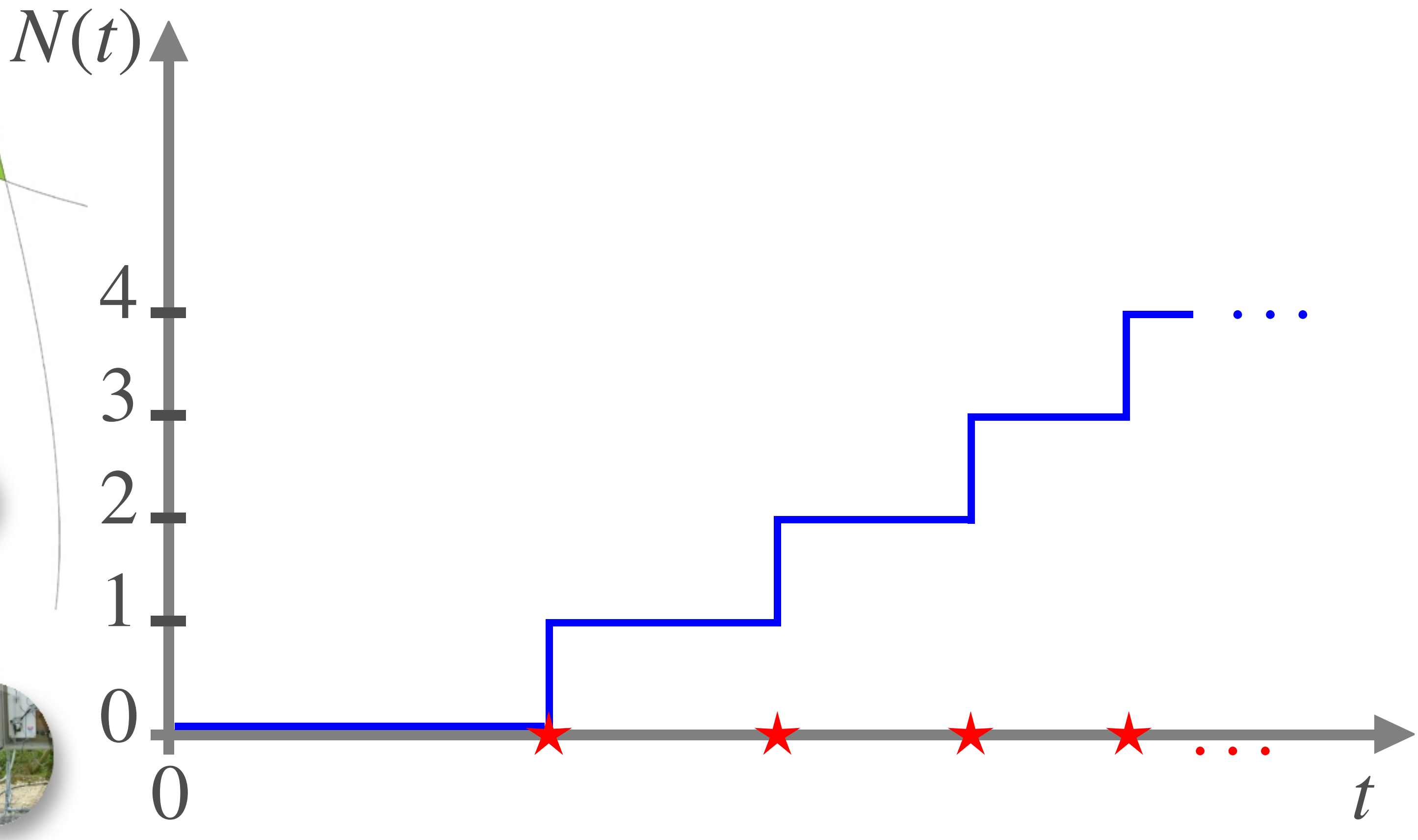
« Non Homogeneous Poisson Process »

Notion centrale de processus de comptage



« Non Homogeneous Poisson Process »

Notion centrale de processus de comptage



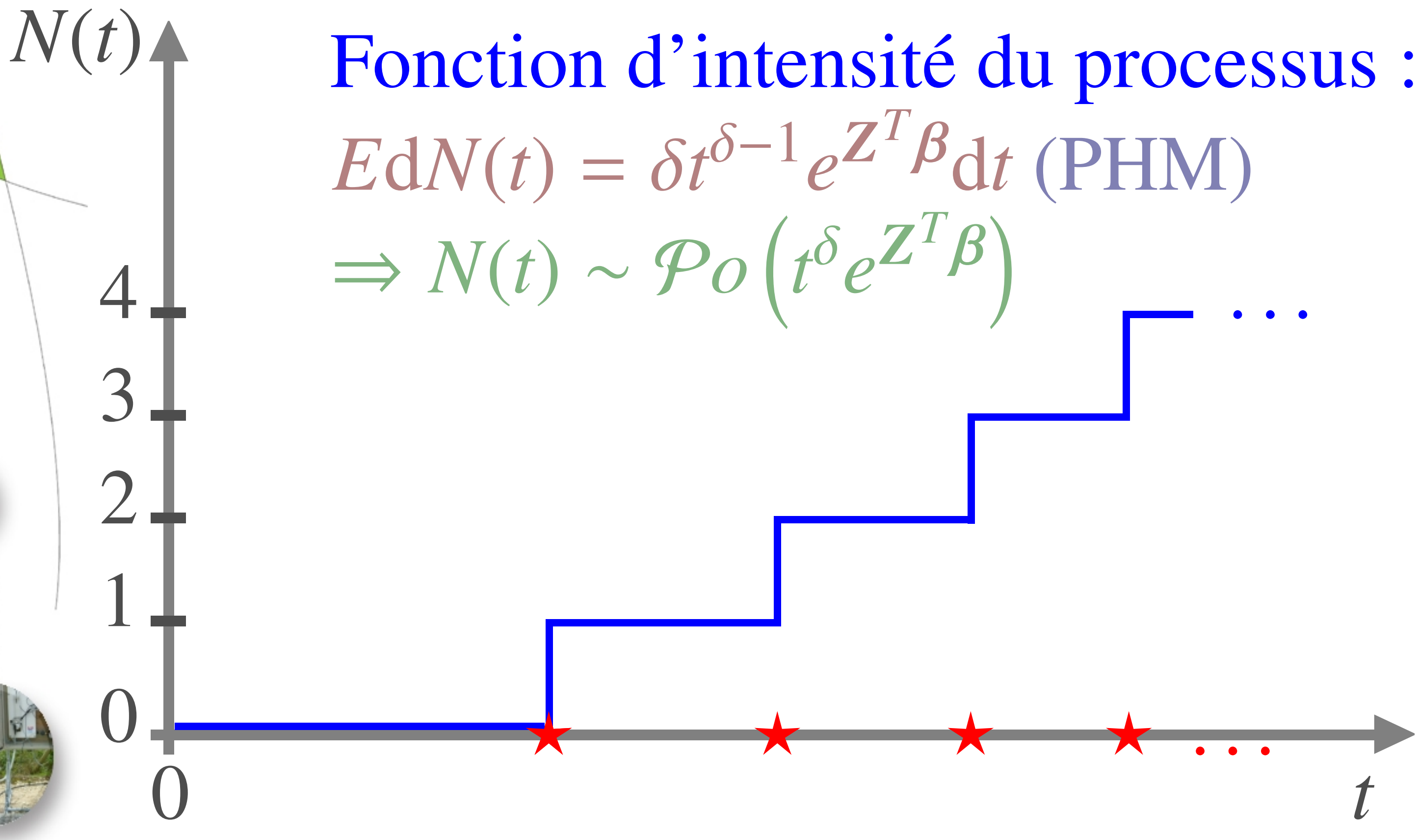
« Non Homogeneous Poisson Process »

Notion centrale de processus de comptage

Fonction d'intensité du processus :

$E\mathrm{d}N(t) = \delta t^{\delta-1} e^{Z^T\beta} \mathrm{d}t$ (PHM)

$\Rightarrow N(t) \sim \mathcal{P}o\left(t^{\delta} e^{Z^T\beta}\right)$



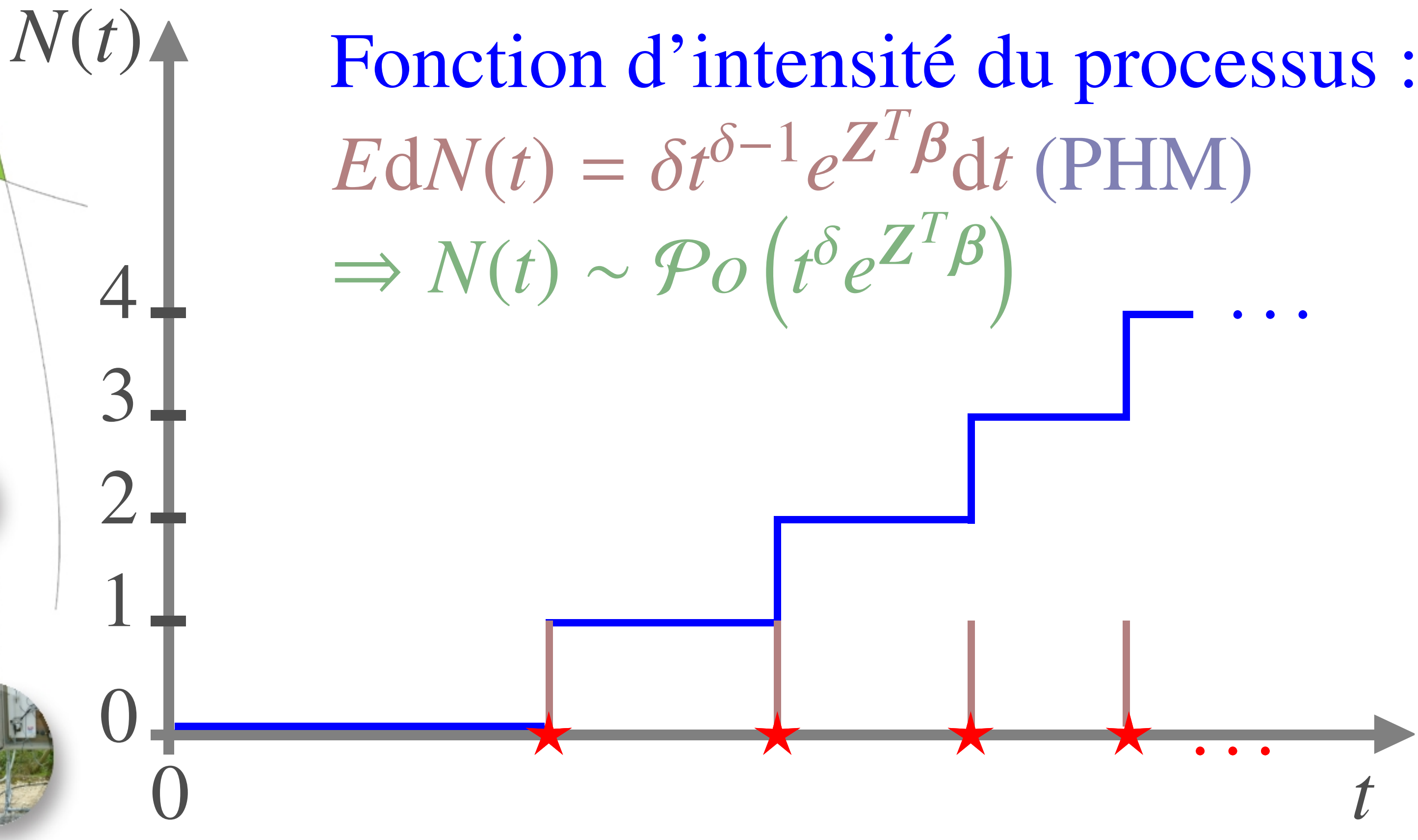
« Non Homogeneous Poisson Process »

Notion centrale de processus de comptage

Fonction d'intensité du processus :

$$E\mathrm{d}N(t) = \delta t^{\delta-1} e^{Z^T\beta} \mathrm{d}t \text{ (PHM)}$$

$$\Rightarrow N(t) \sim \mathcal{P}o\left(t^{\delta} e^{Z^T\beta}\right)$$



Le modèle Røstum 2000 (2)

Le modèle Røstum 2000 (2)

- Avantages

  Prise en compte naturelle de $a > 0$

  Pas de biais de prédiction

  Prise en compte du vieillissement

  Simplicité de calcul des prédictions

Le modèle Røstum 2000 (2)

Avantages

- Prise en compte naturelle de $a > 0$
- Pas de biais de prédiction
- Prise en compte du vieillissement
- Simplicité de calcul des prédictions

Limitations

- Pas de prise en compte de $N(t-)$
- Moindre détection du risque

Le projet européen CareW 2001-2003

- **Mise à l'épreuve des données réelles des modèles Eisenbeis, Malandain et Røstum**

- Mise à l'épreuve des données réelles des modèles Eisenbeis, Malandain et Røstum
- Intérêt pratique de l'approche PHM

Le projet européen CareW 2001-2003

- Mise à l'épreuve des données réelles des modèles Eisenbeis, Malandain et Røstum
- Intérêt pratique de l'approche PHM
- Nécessité d'une synthèse des approches Eisenbeis et Røstum
  → « NHPP doté de mémoire »

Fonction d'intensité du LEYP

Fonction d'intensité du LEYP

$$\mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) = j) =$$

Fonction d'intensité du LEYP

$$\mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) = j) = \underbrace{(1 + \alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}}$$

Fonction d'intensité du LEYP

$$E(dN(t) \mid N(t-) = j) = \underbrace{(1 + \alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}} \; \underbrace{\delta t^{\delta-1}}_{\text{Facteur âge}}$$

Facteur de Yule

Facteur âge

Fonction d’intensité du LEYP

$$E(dN(t) \mid N(t-) = j) = \underbrace{(1+\alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}} \; \underbrace{\delta t^{\delta-1}}_{\text{Facteur âge}} \; \underbrace{e^{Z^T\beta}}_{\text{Facteur de Cox}} \, dt$$

Fonction d'intensité du LEYP

$$E(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) = j) = \underbrace{(1 + \alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}} \; \underbrace{\delta t^{\delta-1}}_{\text{Facteur âge}} \; \underbrace{e^{Z^T \beta}}_{\text{Facteur de Cox}} \, \mathrm{d}t$$

$\alpha \rightarrow$ **Effet des casses passées ($\alpha = 0$: NHPP)**

Fonction d’intensité du LEYP

$$\mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) = j) =$$

$$\underbrace{(1+\alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}} \; \underbrace{\delta t^{\delta-1}}_{\text{Facteur âge}} \; \underbrace{e^{Z^T\beta}}_{\text{Facteur de Cox}} \, \mathrm{d}t$$

Facteur de Yule | **Facteur âge** | **Facteur de Cox**

$\alpha \rightarrow$ **Effet des casses passées ($\alpha = 0$: NHPP)**

$\delta \rightarrow$ **Effet de l’âge ($\delta = 1$: pas de vieillissement)**

Fonction d'intensité du LEYP

$$\mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) = j) = \underbrace{(1 + \alpha j)}_{\text{Facteur de Yule}} \; \underbrace{\delta t^{\delta-1}}_{\text{Facteur âge}} \; \underbrace{e^{Z^T\beta}}_{\text{Facteur de Cox}} \, \mathrm{d}t$$

$\alpha \rightarrow$ **Effet des casses passées ($\alpha = 0$: NHPP)**

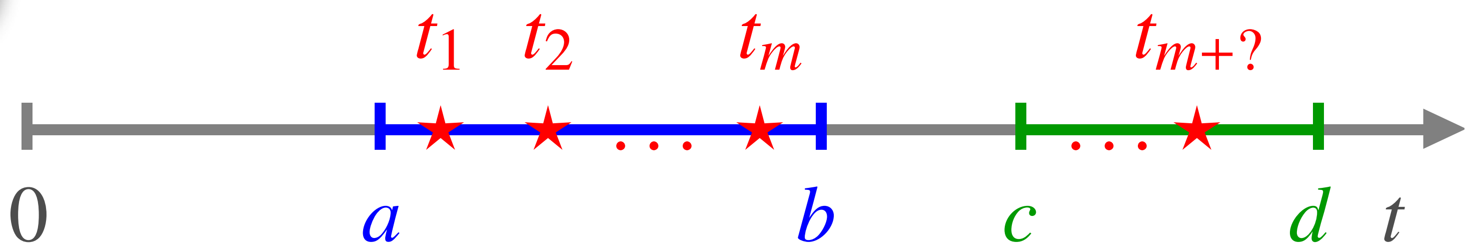
$\delta \rightarrow$ **Effet de l'âge ($\delta = 1$: pas de vieillissement)**

$\beta \rightarrow$ **Coefficients de régression (PHM)**

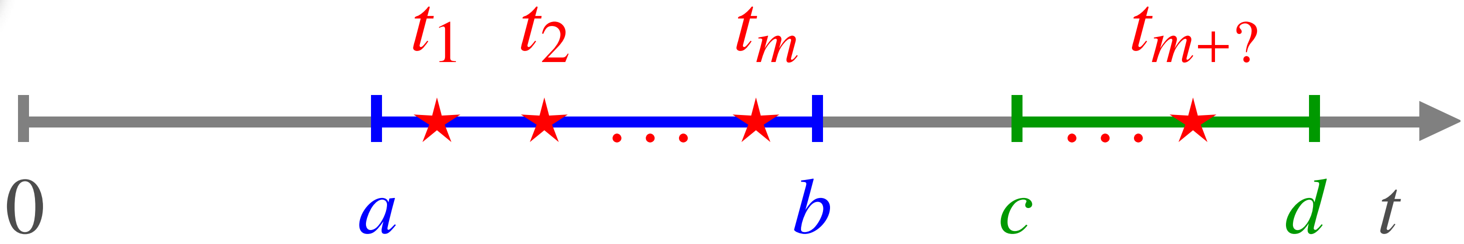
La distribution du processus de comptage

La distribution du processus de comptage

La distribution du processus de comptage



La distribution du processus de comptage



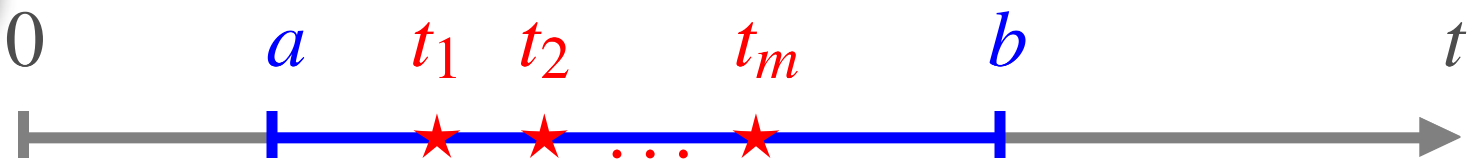
Distribution conditionnelle binomiale négative :

$$[N(d) - N(c) \mid N(b) - N(a) = m]$$

$$\sim \mathcal{NB}\left(\alpha^{-1} + m, \frac{\mu(b)-\mu(a)+1}{\mu(d)-\mu(c)+\mu(b)-\mu(a)+1}\right)$$

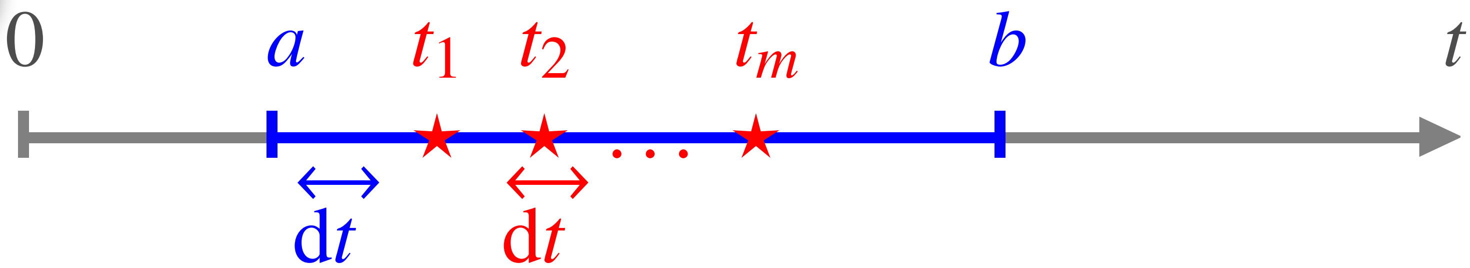
avec $\mu(t) = e^{\alpha t^{\delta}} e^{Z^T \beta}$

Fonction de vraisemblance du LEYP (1)



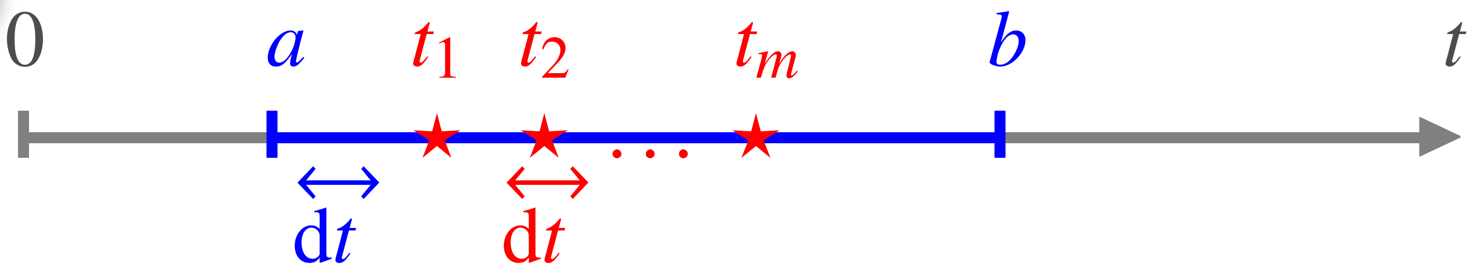
Estimation des paramètres $\theta^T = (\alpha, \delta, \beta^T)$ en maximisant $L(\theta \mid \text{Observations})$

Fonction de vraisemblance du LEYP (1)



Estimation des paramètres $\theta^T = (\alpha, \delta, \beta^T)$ en maximisant $L(\theta \mid \text{Observations})$

Fonction de vraisemblance du LEYP (1)

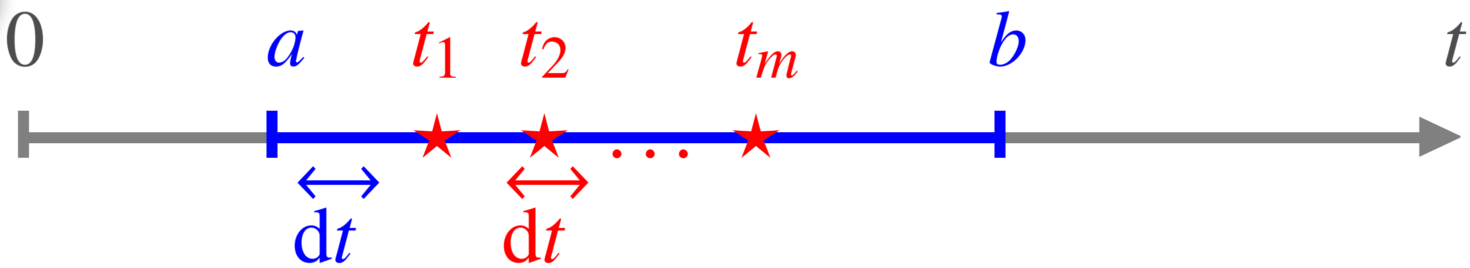


$$E(dN(t) \mid N(t-) - N(a))^{\Delta N(t)}$$

avec $\Delta N(t) = N(t) - N(t-)$

Estimation des paramètres $\theta^T = (\alpha, \delta, \beta^T)$ en maximisant $L(\theta \mid \text{Observations})$

Fonction de vraisemblance du LEYP (1)



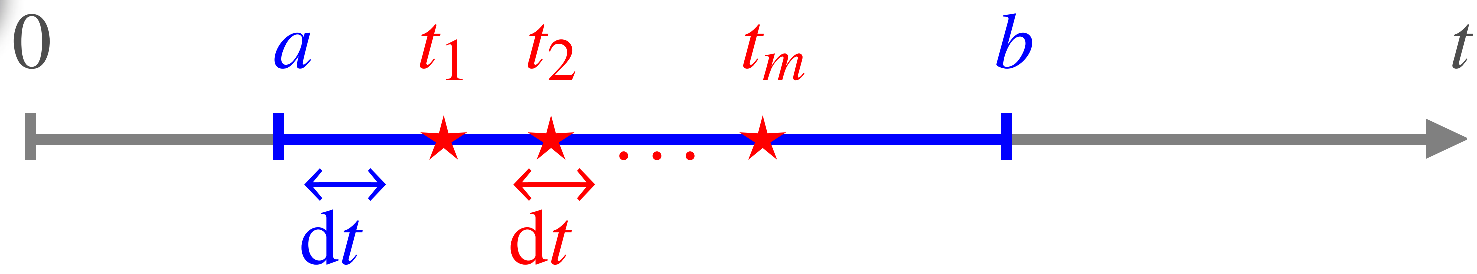
$$\mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) - N(a))^{\Delta N(t)}$$

$$(1 - \mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) - N(a)))^{1-\Delta N(t)}$$

avec $\Delta N(t) = N(t) - N(t-)$

Estimation des paramètres $\theta^T = (\alpha, \delta, \beta^T)$ en maximisant $L(\theta \mid \text{Observations})$

Fonction de vraisemblance du LEYP (1)



$$L(\theta \mid \text{Obs.}) = \prod_{t \in [a,b]} \mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) - N(a))^{\Delta N(t)} \times \left(1 - \mathrm{E}(\mathrm{d}N(t) \mid N(t-) - N(a))\right)^{1-\Delta N(t)}$$

avec $\Delta N(t) = N(t) - N(t-)$

Estimation des paramètres $\theta^T = (\alpha, \delta, \beta^T)$ en maximisant $L(\theta \mid \text{Observations})$

Fonction de vraisemblance du LEYP (2)

$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \mathrm{Obs.}) = \alpha^m \frac{\Gamma(\alpha^{-1}+m)}{\Gamma(\alpha^{-1})} \frac{\prod_{j=1}^{m} \mu(t_j)\lambda(t_j)}{(\mu(b)-\mu(a)+1)^{\alpha^{-1}+m}}$$

avec $\lambda(t) = \delta t^{\delta-1} e^{Z^T\beta}$

$$\mu(t) = e^{\alpha t^{\delta} e^{Z^T\beta}}$$

Fonction de vraisemblance du LEYP (2)

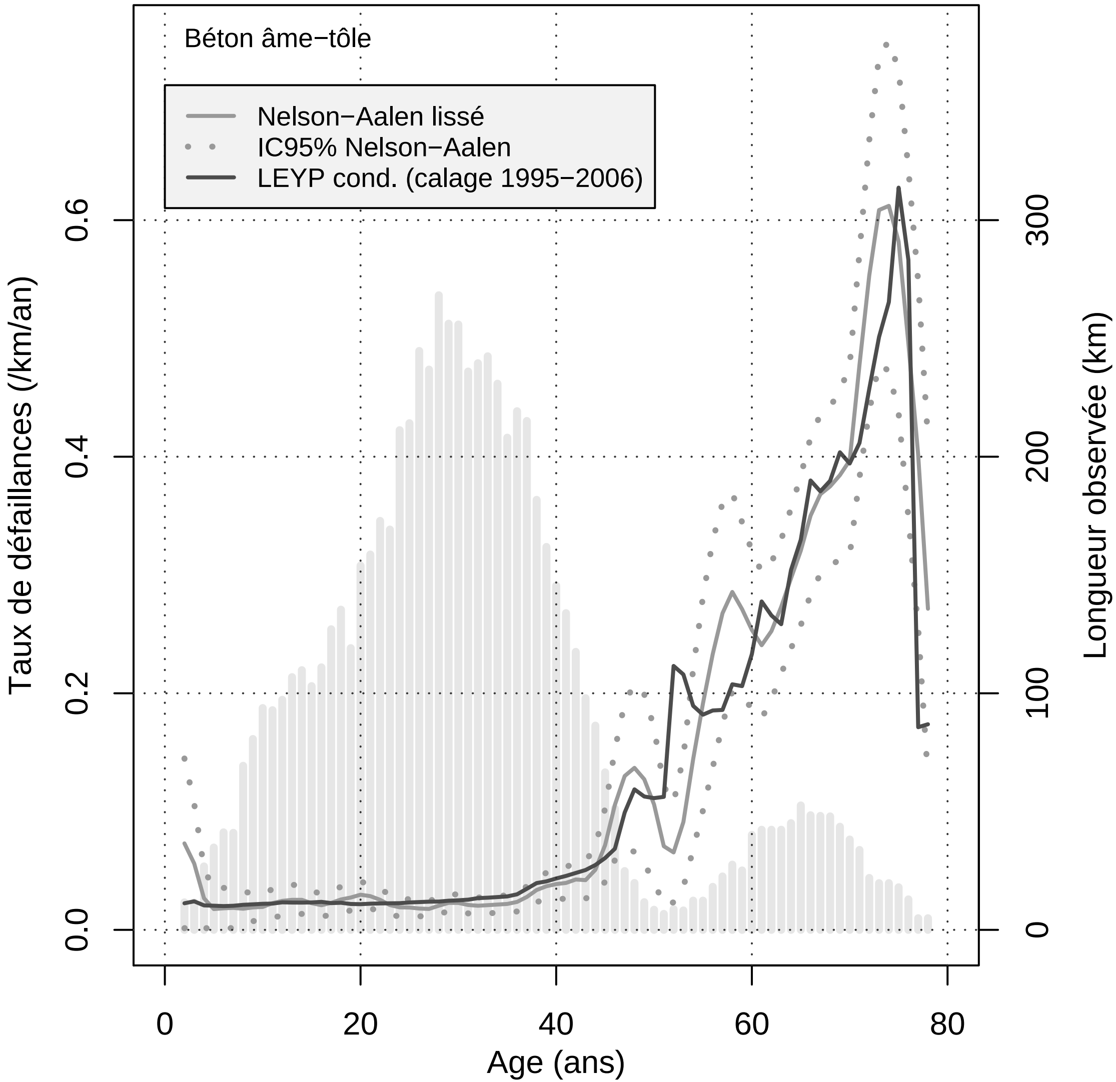
$$L(\boldsymbol{\theta} \mid \text{Obs.}) = \alpha^m \frac{\Gamma(\alpha^{-1}+m)}{\Gamma(\alpha^{-1})} \frac{\prod_{j=1}^m \mu(t_j)\lambda(t_j)}{(\mu(b)-\mu(a)+1)^{\alpha^{-1}+m}}$$

avec
$$\lambda(t) = \delta t^{\delta-1} e^{Z^T \beta}$$
$$\mu(t) = e^{\alpha t^\delta e^{Z^T \beta}}$$

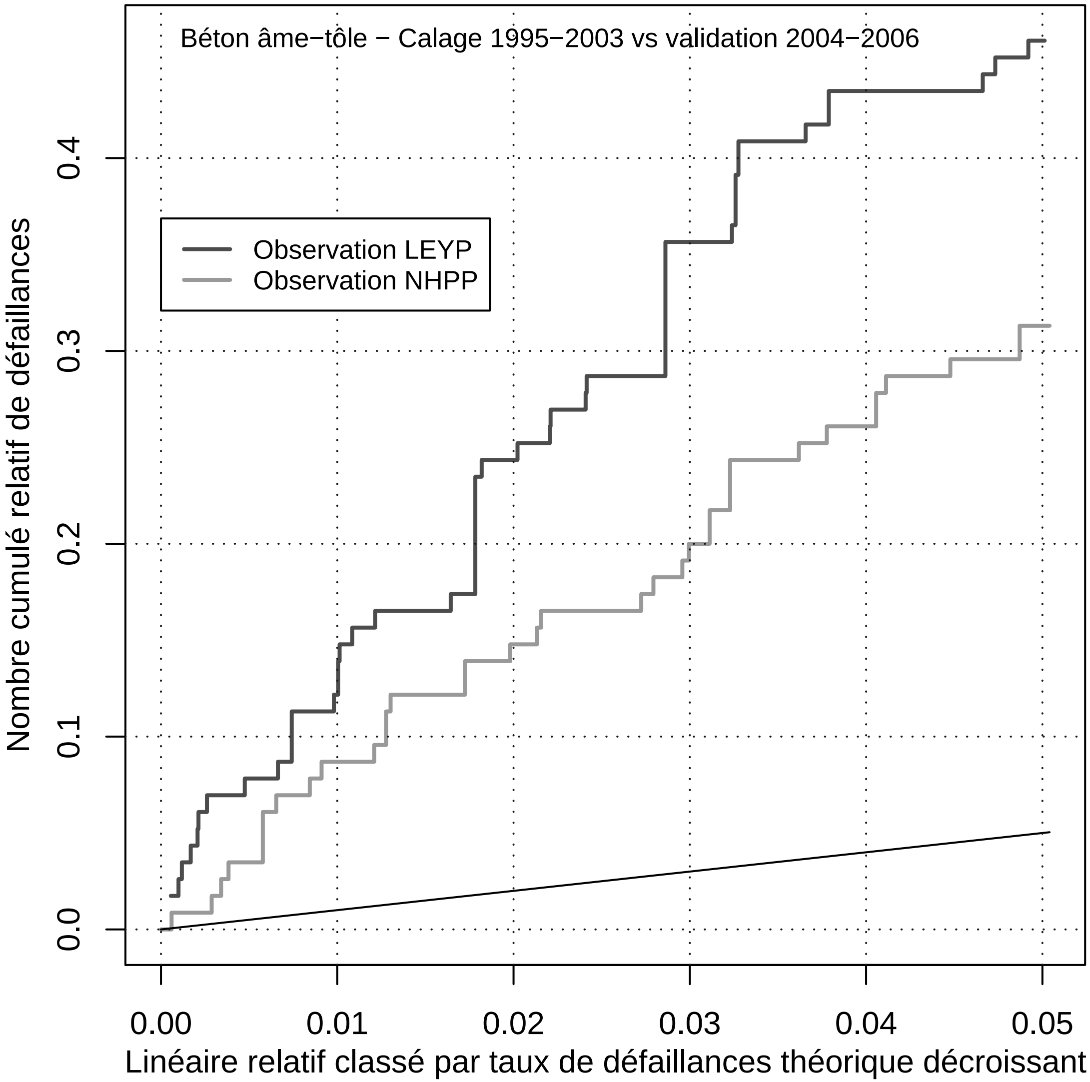
- **Normalité asymptotique des estimations du maximum de vraisemblance**

  $\Rightarrow$ **Test du χ^2 de Wald sur β**

Qualité d'ajustement du modèle



Validation du modèle



Remplacements et survie sélective

- **Chute constatée du taux de casse des canalisations les plus anciennes**
- **Sélection sur la robustesse**
- **T durée aléatoire de maintien en service**
- **$\varsigma(t)$ probabilité de maintien en service suite à une casse à l'âge t**

- **Chute constatée du taux de casse des canalisations les plus anciennes**
- **Sélection sur la robustesse**
- T **durée aléatoire de maintien en service**
- $\varsigma(t)$ **probabilité de maintien en service suite à une casse à l'âge** t

Distribution conditionnelle binomiale négative :

$$[N(d) - N(c) \mid N(b) - N(a) = m, T > a]$$

$$\sim \mathcal{NB}\left(\alpha^{-1} + m, \frac{\mu(b) - \int_0^a \varsigma(u)\mathrm{d}\mu(u)}{\mu(d) - \mu(c) + \mu(b) - \int_0^a \varsigma(u)\mathrm{d}\mu(u)}\right)$$

en supposant $\quad \varsigma(t) = 1$ pour $t \geqslant b$